UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Actividades contextualizadas en la historia de las matemáticas para dotarlas de significado y construir su conocimiento

Autor/es

ERIK MUÑOZ MARÍN

Director/es

MIGUEL MARAÑÓN GRANDES

Facultad

Escuela de Máster y Doctorado de la Universidad de La Rioja

Titulación

Máster Universitario de Profesorado, especialidad Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2019-20

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

Trabajo de Fin de Máster

Actividades contextualizadas en la historia de las matemáticas para dotarlas de significado y construir su conocimiento

Autor

Erik Muñoz Marín

Tutor: Miguel Marañón Grandes

MÁSTER:
Máster en Profesorado, Matemáticas (M06A)

Escuela de Máster y Doctorado

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

AÑO ACADÉMICO: 2019/2020

RESUMEN

En el siguiente trabajo se exponen tres ejemplos de aplicación de la historia de las matemáticas en la enseñanza de esta materia. Comenzando con una justificación teórica de esta forma de emplear la historia y mencionando los puntos de vista de varios autores así como los objetivos y el planteamiento de este trabajo, desarrollaremos esta metodología para la enseñanza de la trigonometría, las secciones cónicas y el cálculo en los niveles de Bachillerato.

También discutiremos la viabilidad y dificultades que podrían aparecer a la hora de aplicarlo en las aulas, para finalmente extraer varias conclusiones a partir de todo lo trabajado durante la elaboración de las aplicaciones prácticas.

Con el tema planteado emplearemos la historia de las matemáticas para llamar la atención de los alumnos sobre esta asignatura y tratar de encontrar un medio para facilitarles el aprendizaje de los contenidos más abstractos al situarlos dentro de un contexto fácil de comprender.

ABSTRACT

The following paper presents three examples of the application of the history of mathematics in the teaching of this subject. Starting with a theoretical justification of this way of using history and mentioning the points of view of several authors as well as the objectives and approach of this work, we will develop this methodology for the teaching of trigonometry, the conic sections and calculus in the high school levels.

We will also discuss the feasibility and difficulties that could appear when applying it in the classroom, to finally draw several conclusions from everything worked during the elaboration of the practical applications.

With this topic, we will use the history of mathematics to draw students' attention to this subject and try to find a way to facilitate them learning the most abstract contents by placing them within an easy-to-understand context.

ÍNDICE **Página**

1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN.

A muchos de los alumnos de ESO y Bachillerato les pueden resultar bastante aburridas las clases de matemáticas convencionales, y resulta contraproducente que no puedan observar una aplicación práctica útil de forma evidente. Puesto que esta situación puede llevar al abandono del estudio de las matemáticas o a la creencia por parte de los alumnos de que resulte innecesario el estudio de esta materia, expongo la propuesta de intervención didáctica que desarrollo en este trabajo basada en la aplicación de la historia de las matemáticas como medio para incrementar el interés del alumnado por esta materia. De este modo, se pretende que con la aplicación de los recursos presentados en este documento se aumente la eficacia de las lecciones de matemáticas y así hacerlas más atractivas de cara al alumnado, para reducir el número de alumnos y alumnas que deciden dejar de estudiar esta asignatura y lograr evitar que esta sea vista como la oveja negra de las instituciones de educación para que no se convierta en algo que hay que aprobar y olvidar.

Así, a lo largo de este trabajo, se desarrollan unos recursos para su aplicación en clases de matemáticas que emplean la historia de los contenidos impartidos para facilitar una visión a través del planteamiento de problemas, en la que se aprecia la utilidad y aplicación de las matemáticas, y cómo se emplearon en el pasado para resolver problemas reales.

Por lo tanto, este trabajo está destinado a los últimos cursos de la ESO y Bachillerato, donde el contenido matemático puede resultar cada vez más abstracto y difuso en cuanto a su utilidad futura. De este modo, trataremos de mostrar la importancia de esta asignatura para que no sea algo que quieran aprobar, sino que se convierta en algo que quieran aprender.

Además, otra de las utilidades de esta propuesta consiste en evitar que los contenidos de matemáticas que se imparten en los institutos sean aprendidos como simples recetas para poder superar los exámenes y ser olvidadas después de cada evaluación, mostrando la continuidad de los conocimientos y su estructura para que sean interiorizados y comprendidos. Por lo tanto, se trabaja también la problemática de olvidar, o al menos perder la práctica, de los conocimientos aprendidos cuando los alumnos y alumnas promocionen a los cursos siguientes, lo cual es motivo de pérdida de motivación para el estudio.

2. OBJETIVOS.

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar una forma de presentar el contenido de matemáticas a los alumnos de Secundaria y Bachillerato consistente en la realización de una serie de ejercicios y/o problemas a lo largo de toda la duración de la unidad didáctica para la que se elabore. Este contenido consistirá en una relación de ejercicios contextualizados dentro de una situación real relacionada con la historia de las matemáticas en la cual se desarrollaron, o se pudieron haber empleado, las herramientas matemáticas que los alumnos deben conocer y aprender a manejar.

A este fin, deberá estudiarse de manera muy exhaustiva la historia de las matemáticas, cómo surgieron las herramientas y técnicas correspondientes a cada unidad didáctica y cómo presentar de manera adecuada las actividades a los alumnos.

También se estudiará la efectividad e idoneidad de esta forma de complementar el desarrollo normal de una unidad didáctica apoyándonos en los artículos sobre didáctica de las matemáticas relacionados con el empleo de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de estas.

Además, se incluye una relación de actividades como las aquí descritas para varios niveles educativos y acerca de varias temáticas del contenido impartido en Secundaria y Bachillerato para ejemplificar esta forma de añadir contenido a las unidades didácticas. Para esto, una vez escogida la temática y el nivel al que estará destinada, llevaremos a cabo los siguientes pasos:

- Estudio de la historia de las matemáticas relacionada con la temática escogida.
- Búsqueda de aquellos sucesos significativos que estén relacionados con estas matemáticas.
- Elección del contexto más apropiado en el que plantear la actividad a los alumnos, relacionado o no con el suceso escogido anteriormente.

- Planteamiento de las cuestiones relacionadas con el contexto escogido de forma que abarquen la unidad didáctica, total o parcialmente.
- Revisión de la actividad planteada y estudio de las competencias que los alumnos trabajarían durante la realización de esta para determinar si es o no apropiada.

Además, como objetivo adicional, se tendrá presente a lo largo de todo el trabajo la intención de realizar unas actividades que puedan fomentar el interés del alumnado por las matemáticas, mostrando la utilidad y las aplicaciones del contenido matemático. Por lo tanto, a la hora de escoger el contexto histórico y desarrollar las actividades y problemas, tendremos en cuenta este objetivo de interesar al alumnado para así, tal vez, evitar el fracaso en las matemáticas.

Otra finalidad de estas actividades es conseguir una asimilación más efectiva de los contenidos y conocimientos matemáticos. Dado que a lo largo de los seis años que duran la Secundaria y el Bachillerato es en la asignatura de matemáticas donde más se destaca el carácter constructivo de los conceptos, haciéndose cada vez más abstractos y complejos, queremos conseguir que el alumnado asimile de manera eficaz los conocimientos. Así, esperamos evitar que el estudio de las matemáticas se convierta en el aprendizaje de una serie de recetas sin sentido que deben aplicarse en función del ejercicio o problema planteado, para así conseguir que los alumnos alcancen un nivel de comprensión superior de los conceptos y técnicas y evitar que todo el contenido aprendido en los cursos anteriores sea olvidado y el esfuerzo empleado en ello caiga en saco roto.

3. MARCO TEÓRICO Y ESTADO DE LA CUESTIÓN.

En este apartado debemos estudiar el por qué es apropiado emplear la historia de las matemáticas para la enseñanza de esta materia y se considera que puede resultar una herramienta que aporte gran beneficio para los alumnos, así como el modo en que puede ser empleada en el aula.

Herrera (2010), en el enfoque que aborda para el empleo de la historia, encuentra que a los alumnos les resulta motivador e interesante conocer la historia porque ello les permite apreciar el desarrollo de las matemáticas dentro de las antiguas culturas. Además, como ventaja del empleo que dio a la historia de las matemáticas para la enseñanza de la geometría, encontró que ello permitió a algunos de los alumnos apreciar el "carácter deductivo de la geometría euclidiana" y comprender la importancia de los conceptos geométricos trabajados, sus propiedades y sus relaciones.

Según Urbaneja (2004), citando a Bell (1985, p.54): "Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas". Urbaneja (2004) también menciona que: "La perspectiva histórica permite dar una visión panorámica de los problemas matemáticos para calibrar con mayor precisión la importancia de los temas, quedando así mejor articulados dentro del contexto general". Así, Urbaneja (2004), citando a Poincaré, afirma que es imposible entender una teoría si se le da desde el principio una forma definitiva y rigurosa que es impuesta sin mencionar el camino seguido por el que ha llegado a tomar esa forma.

Por tanto, resulta absurdo enseñar a los estudiantes como si las Matemáticas hubieran sido deducidas por pura lógica, ya que les hace sentir humillados y desconcertados al no poder trabajar de esta manera, y de este modo "se destruye la vida y el espíritu de las Matemáticas". Finalmente, Urbaneja (2004) concluye que la historia de las Matemáticas puede ser un buen medio para ayudar al aprendizaje de esta asignatura al emplearla para plantear su estudio como un redescubrimiento de las Matemáticas.

Del Río Sánchez (1997) destaca el papel de los problemas en la construcción de las Matemáticas, siendo la resolución de estos la principal fuente de motivación en origen. Así, la enseñanza de esta asignatura debe iniciarse con el planteamiento de un problema con sentido para los alumnos. Además, pone mucho énfasis en el proceso de resolución como forma de descubrimiento y de obtención de resultados “aproximados” como etapas previas y que sirven para desarrollar la teoría. Finalmente, menciona que, apoyándonos en la teoría constructivista del aprendizaje, la historia de las matemáticas debe tenerse en cuenta a la hora de la enseñanza de esta materia para evitar que simplemente aprendan a memorizar las definiciones y procedimientos para la resolución de problemas y consigan comprender estos conocimientos.

Auster (2007) encuentra que los alumnos entienden las matemáticas como algo impuesto y sin ningún contexto que las justifique, y destaca que según Daniel Gil y Miguel de Guzmán:

“La historia debería ser un potente auxiliar para objetivos tales como:

- hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemáticas;
- enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes;
- señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente;
- apuntar las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes.”

Así, Auster (2007) concluye que la historia permite contextualizar los conocimientos y conceptos matemáticos de cara a los alumnos para generar una comprensión e interiorización más profunda por su parte al mostrarles que las matemáticas no son algo extraño a ellos y que son una materia que se encuentra muy relacionada y cercana a otras ciencias.

Por otro lado, Gómez (2002) afirma que las matemáticas son vistas por los estudiantes como un ámbito del conocimiento muy cerrado y cuyos conceptos carecen de historia y del proceso de creación. Por tanto, exponer a los alumnos a este proceso de creación puede hacerla parecer más accesible para ellos y más cercana y asequible, contribuyendo esto a varias áreas del aprendizaje de las matemáticas. También encuentra muy favorable el conocimiento de las dificultades que hubo en el desarrollo de los conocimientos matemáticos para así poder anticipar las que seguramente encuentren los alumnos a la hora de trabajar conceptos nuevos para ellos y que les supongan un reto, desde la construcción de los números negativos en la E.S.O. hasta la resolución de ecuaciones de grado alto en Bachillerato.

Además, Gómez (2002) expone que, dado que durante el desarrollo de las matemáticas se partía de ejemplos concretos que luego llevaban a generalizaciones y el desarrollo de teorías, la historia puede mostrarnos una forma más natural de llevar a cabo la enseñanza en el aula, al revés de como es habitual, partiendo de la teoría general hacia los ejemplos específicos. Así, esto podría contribuir a que los estudiantes adquieran una mejor comprensión de los contenidos, partiendo de la necesidad de resolver problemas hasta la presentación de la teoría más general.

Gómez (2002) también destaca la utilidad de ciertos problemas tales como el de los cuatro colores o la conjetura de Goldbach para llamar la atención del alumnado sobre ciertos temas de las matemáticas y evitar que estas se entiendan "como un ente cerrado e inmutable, del que el profesor dispone de todo el conocimiento".

Maz (1999) también coincide con Gómez (2002) en muchas de las razones que aporta, como la utilidad para motivar a los alumnos mediante problemas, o mostrar el desarrollo no lineal que tuvieron para destacar el trabajo que supusieron determinados conocimientos. En particular, menciona las siguientes razones que aporta Fauvel (1991) en favor de emplear la historia de las matemáticas para la enseñanza:

1.- Ayuda e incrementa la motivación para el aprendizaje.

2.- Muestra el aspecto humano de las matemáticas.

3.- Cambia en los alumnos la percepción de las matemáticas.

4.- Ayuda al desarrollo de un acercamiento multicultural.

5.- Provee la posibilidad de un trabajo interdisciplinario con otros maestros.

6.- El desarrollo histórico ayuda a ordenar la presentación de los tópicos en el currículo.

7.- Indica cómo los conceptos fueron desarrollándose, ayudando esto a su comprensión.

8.- Los alumnos sienten bienestar al realizar esto, y no hacerlo únicamente con unos problemas.

Finalmente, podemos concluir que la historia de las matemáticas puede ser un instrumento muy potente para los profesores a la hora de la enseñanza de esta materia, pudiendo emplearla de una gran variedad de formas para motivar al alumnado, comprender sus dificultades, ofrecer un punto de vista alternativo, contextualizar los conocimientos impartidos y mostrar el lado humano en el desarrollo de esta materia; pero, sobre todo, es la gran variedad de problemas que nos ofrece lo que permite que se pueda implementar en las aulas de secundaria y así impartir clase de manera distinta a las usuales clases magistrales.

Respecto al estado de la cuestión, en el estudio llevado a cabo por Başibüyük y Şahin (2019) se determinó, tras entrevistar a varios profesores de matemáticas, que la mayoría no empleaba la historia de las matemáticas en sus clases debido a algunas razones tales como la falta de información en los libros de texto, la falta de tiempo y el consumo que supone, la falta de conocimientos sobre la historia, la ausencia de problemas relacionados con ella o su exclusión en los exámenes de conocimientos sobre la historia. También comprobaron que los aspectos de la historia de las matemáticas que principalmente se llevaban a las aulas eran las biografías de matemáticos famosos, mientras que hay mucha información acerca del desarrollo de esta materia en las antiguas civilizaciones.

Başibüyük y Şahin (2019) concluyeron que los participantes en su estudio empleaban la historia de las matemáticas para atraer la atención de los alumnos, despertar su curiosidad, incrementar su interés, mejorar sus capacidades cognitivas y afectivas y ayudarles a encontrar una relación entre las matemáticas y su vida diaria. Aun así, muchos encontraban inadecuado llevar al aula la historia de las matemáticas por las razones antes mencionadas.

Bütüner (2018) también mencionó estas mismas razones por las que los profesores de su estudio no llevaban a sus clases la historia de las matemáticas, creyéndose una parte de ellos incompetentes para el uso de la historia. Así, encontró necesario entrenar a los profesores en integrar la historia en sus clases.

Lim y Chapman (2015) encontraron que algunos de los alumnos participantes en su estudio tuvieron una mejora en su rendimiento a partir de la inclusión de la historia de las matemáticas en sus clases; sin embargo, a muchos de ellos no les gustó debido al tiempo invertido en cubrir los contenidos históricos de los cuales no se les examinó.

Además, una pequeña parte de los estudiantes fueron incapaces de seguir las lecciones, atribuyendo esto al menor nivel en matemáticas que estos alumnos presentaban con respecto al resto de la clase. Por tanto, Lim y Chapman (2015) concluyeron que habría que simplificar las lecciones para ellos.

Para tratar de mejorar la imagen de la historia de las matemáticas en los profesores, Fenaroli, Furinghetti y Somaglia (2014) desarrollaron un curso para instruirlos sobre esta materia y su potencial para ser aplicada en el aula. De este modo, los participantes pudieron ver nuevas formas de acercar conceptos y el carácter intuitivo y de rigor de las matemáticas. Así, algunos de estos profesores emplearon la historia de las matemáticas en sus aulas como un tema por sí mismo.

4. PROPUESTA DE APLICACIÓN PRÁCTICA EN EL AULA: TRIGONOMETRÍA.

Este primer ejemplo versará acerca de la trigonometría impartida en el curso de 1º de Bachillerato. Para ello, comenzaremos estudiando la historia de este tema de forma resumida tratando de ver cómo podemos emplearla para la enseñanza del mismo. Para la búsqueda de la información emplearemos los apuntes de clase de Sols Lucía (UCM, 2016/2017) y el libro de Boyer y Merzbach (2011).

4.1. Historia de la trigonometría.

La palabra trigonometría deriva del griego “trigonos” y “metros”, es decir, medir los triángulos. Esta ciencia nació en Babilonia y Egipto, siendo los egipcios los primeros en aproximar mediciones de ángulos y lados de triángulos rectángulos en la construcción de pirámides (inclinación de estas) y en la agricultura (medición de parcelas tras cada una de las crecidas periódicas del Nilo), y también la emplearon en astronomía.

Los babilonios también la desarrollaron pero con una finalidad más práctica, como relaciones entre longitud y área. En una tabla babilonia antigua (Figura 1) se encuentran varios números que pueden interpretarse como las mediciones de triángulos rectángulos, siendo una de las medidas la secante al cuadrado de uno de los ángulos.

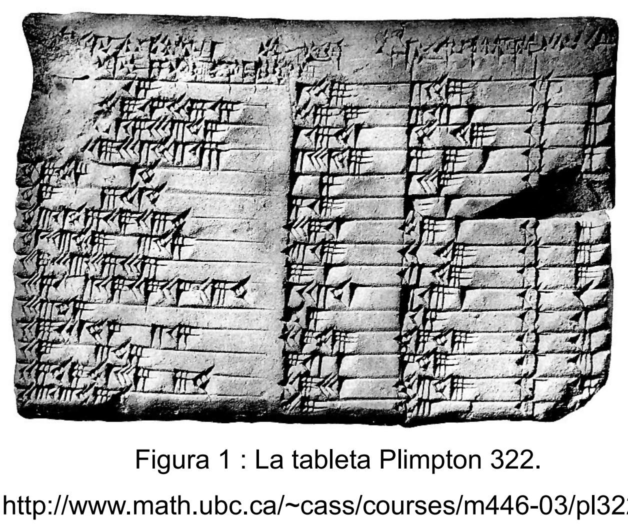

Figura 1 : La tableta Plimpton 322.

Fuente: http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/pl322.html

Después, el desarrollo continuó en Grecia, donde podemos destacar a Tales y Pitágoras, a quienes debemos conocidos resultados. También vale la pena mencionar a Hiparco de Nicea, quien elaboró tablas de mediciones de cuerdas en triángulos.

También cabe mencionar Los Elementos de Euclides, obra que contribuyó de manera trascendental al desarrollo de la trigonometría, así como de otras ramas de las matemáticas.

Como ejemplo de la utilidad de esta ciencia, el trabajo de Eratóstenes en la medición del radio terrestre resulta de gran utilidad, siendo un hecho muy útil de cara a este trabajo.

En el Almagesto de Ptolomeo se emplean “cuerdas” de triángulos dentro de circunferencias, cuyas medidas pueden transformarse fácilmente en nuestros actuales seno y coseno. Además, llevó más allá la división en 360º que se encontraba vigente en Grecia desde Hiparco, incluyendo minutos y segundos.

Fue en la India donde se introdujo la notación de seno para sustituir las tablas de cuerdas de los griegos, donde se elaboraron tablas de senos que están recogidas en el texto Sindhind.

Los árabes trabajaron tanto con las tablas de cuerdas del Almagesto, como con las tablas de senos hindúes, pero fueron estas últimas las que triunfaron.

Otras medidas tales como tangente, cotangente, secante o cosecante son difíciles de determinar en origen, habiendo varios textos haciendo referencia a la “hipotenusa de la sombra” en Arabia y en la India.

En Europa, la trigonometría se desarrolló junto con la astronomía, donde podemos destacar a Copérnico y Rheticus. *De Revolutionibus Orbium Coelestium* de Copérnico (Figura 2) contiene gran parte de trigonometría, y su estudiante, Rheticus, fue más allá de las ideas de Copérnico y Regiomontano. Combinando las ideas de sus predecesores con las suyas propias, empezó a dar uso a las seis funciones trigonométricas y elaboró tablas de estas funciones.

Figura 2 : Edición de 1543 de *De Revolutionibus Orbium Coelestium* de Copérnico (Universidad de Lieja).
Fuente: Wikipedia.

Finalmente, cabe destacar a François Viète como continuador del trabajo de Rheticus y Regiomontano, elaborando tablas de las seis funciones, fórmulas equivalentes a las actuales leyes de las tangentes e identidades trigonométricas (empezaron a aparecer por toda Europa). Otro de sus aportes vino en la resolución de ecuaciones trigonométricas cuando vio la relación entre sus fórmulas y la solución de la ecuación cúbica.

4.2. Elección del material.

A raíz de mi estudio de la historia de esta materia, la medición del radio terrestre de Eratóstenes parece que podría servir a la finalidad que buscamos, y el contexto árabe parece ser el más apropiado en el que situar parte del material, puesto que fueron quienes introdujeron la notación actual de senos y cosenos. Igualmente útil puede resultar la aplicación en la astronomía.

Eratóstenes: Eratóstenes de Alejandría fue quien llevó a cabo una de las mediciones astronómicas más famosas de la antigüedad al medir el radio terrestre del siguiente modo. Se percató de que estando en Alejandría a determinada hora, en Syenes, una ciudad más al sur en el mismo meridiano que Alejandría, el Sol caía completamente vertical (la ciudad está situada en el trópico de Cáncer). En ese momento, midió el ángulo que formaba el Sol con la vertical, obteniendo una medida de 360/50=7,2º (véase la Figura 3). Por tanto, el ángulo formado por los radios terrestres que unen Alejandría y Syenes con el centro formaban también 7,2º. Sabiendo que la distancia entre Alejandría y Syenes que midió Eratóstenes es de 792,228 km., pudo determinar la longitud del radio terrestre:

$$2\pi R_T = d(360/7{,}2),$$

donde R_T es el radio terrestre y d la distancia entre ambas ciudades; esto es, el arco de la circunferencia terrestre.

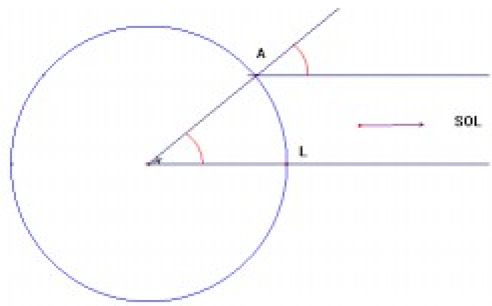

Figura 3: Esquema de los ángulos del Sol con la vertical en dos puntos distintos sobre la Tierra.
Fuente: Apuntes de Sols Lucía, Ignacio.

Otra de las mediciones que pudo llevar a cabo a partir de la anterior fue el radio de la Luna, el radio del Sol, la distancia a la Luna y la distancia al Sol (véase la Figura 4).

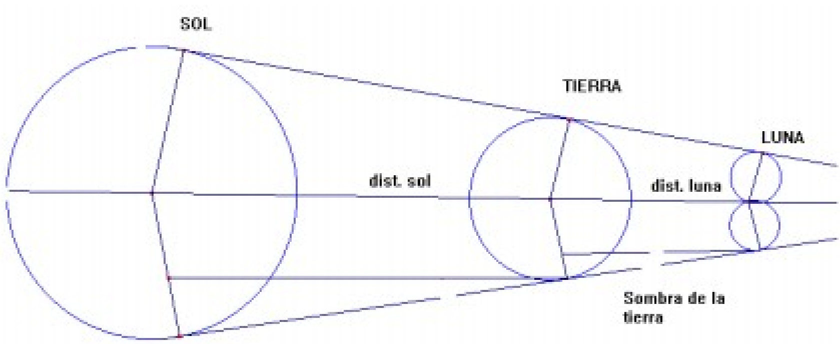

Figura 4: Esquema del sistema Tierra-Sol-Luna.
Fuente: Apuntes de Sols Lucía, Ignacio.

Primero observó que en un eclipse lunar el tiempo que pasa desde que la Luna empieza a oscurecerse hasta que se eclipsa del todo es la mitad del tiempo que transcurre desde que se eclipsa del todo hasta que vuelve a aparecer.

Así, pudo calcular el radio de la Luna del siguiente modo:

$$a=d_S/d_L=(R_S-R_T)/(R_T-2R_L)=(aR_L-R_T)/(R_T-2R_L),$$

siendo *a* una proporción ya conocida por Aristarco, R_T el radio terrestre ya conocido, R_L el radio lunar y R_S el radio solar.

Arabia: Al-Kwarizmi construyó las primeras tablas del seno y el coseno, y otras tablas con otras razones (como las tangentes o cotangentes) fueron elaboradas por los matemáticos árabes. También establecieron algunas de las identidades trigonométricas que tanto usamos hoy día, como

$$\tan x = \sin x / \cos x,$$

y también definieron las funciones trigonométricas de la secante y la cosecante (Al-Battani).

Astronomía: En astronomía se emplea la trigonometría para realizar paralelajes, procedimientos similares a los seguidos por Eratóstenes en sus mediciones, mirando un mismo objeto desde dos puntos distintos y resolviendo el triángulo.

4.3. Cuestiones para plantear.

En el momento de presentar este nuevo tema a los alumnos, se explicará la historia de Eratóstenes y sus mediciones de la Tierra sin especificar cómo las llevó a cabo para dar a conocer la utilidad de este nuevo tipo de matemáticas que se les explicarán. Se les planteará la resolución de este mismo problema en una serie de pasos que resultarán factibles para ellos y que, a medida que avancen en su formación, serán capaces de resolver.

Tras realizar una breve introducción histórica, se explicarán los principios básicos de la medición de ángulos y razones trigonométricas. A partir de aquí, se planteará la primera cuestión: la medición del ángulo que llevó a cabo Eratóstenes. Dado que el objetivo es que el alumnado realice una práctica de los métodos de medición, que básicamente consistirá en resolver triángulos rectángulos, se plantearán varias situaciones más o menos reales en las que realizarán varios ejercicios con las razones trigonométricas y algunas de las fórmulas que las relacionan tales como el teorema de Pitágoras.

En este momento, se darán a conocer la historia de los árabes y sus tablas de razones trigonométricas y la razón de tangente.

Para el siguiente paso de la resolución del problema, se deberá explicar la resolución de triángulos cualesquiera y se introducirán nuevas fórmulas tales como la de Herón y los teoremas del seno y del coseno. A continuación, se pedirá que planteen la resolución del triángulo que llevó a cabo Eratóstenes con los datos que obtuvieron anteriormente para que practiquen estos nuevos conceptos y teoremas y puedan finalmente obtener la medida del radio terrestre.

Seguidamente, se presentarán a los alumnos las conocidas fórmulas de las razones trigonométricas del ángulo suma, resta, doble y mitad. Dado el beneficio que puede aportar ver y comprender la demostración de estas fórmulas, sería recomendable llevar a cabo la explicación de alguna de estas dibujando siempre los ángulos en una circunferencia unidad en la pizarra, y tal vez animarles a plantear ideas, pero esto es decisión del profesor y dependerá de si el grupo es adecuado para ello.

Para la práctica de estas nuevas fórmulas se plantearán ejercicios relacionados con el contexto histórico presentado o en un contexto astronómico.

Finalmente, saldrán a relucir las ecuaciones trigonométricas, siendo estas una de las mayores dificultades para muchos alumnos de Bachillerato, donde se explicarán los aportes de Viète y se plantearán algunos ejercicios.

4.4. Las actividades.

A continuación se expone un ejemplo de esta forma de plantear la trigonometría:

LA TRIGONOMETRÍA DE ERATÓSTENES

Eratóstenes de Cirene fue un matemático, astrónomo y geógrafo griego nacido en Libia en el siglo III a.C. conocido principalmente por las mediciones que llevó a cabo del planeta Tierra. Fue la primera persona en dar una aproximación bastante precisa del radio terrestre. Para ello, llevó a cabo una serie de mediciones de ángulos, para lo que utilizó la trigonometría y el Sol midiendo la sombra de postes en el suelo cuyas alturas eran conocidas:

1.- Si colocas un poste de altura 2 metros y observas que proyecta una sombra de 4 metros, calcula el ángulo del triángulo formado con la vertical. Date cuenta de que este es el mismo ángulo que el formado por el Sol con la vertical.

2.- Si desde la copa de un árbol tiendes una cuerda hasta el suelo que mide 36 metros y mides que la distancia desde la base del árbol hasta el extremo de la cuerda en el suelo es de 24 metros, calcula el ángulo formado por la cuerda con la vertical. Determina la altura del árbol.

Observa que has podido calcular una distancia (la altura del árbol) sin necesidad de medirla directamente. Esta es una de las utilidades de la trigonometría.

3.- Eratóstenes fue capaz de calcular el ángulo del Sol con la vertical mediante este tipo de procedimientos. Ahora, si sabemos que este ángulo en un determinado momento del día es de $\pi/3$ radianes, ¿cuál sería la longitud de tu propia sombra si estuvieras de pie en el medio de un campo de fútbol en ese momento del día?

Intenta plasmar en un dibujo el ángulo del Sol para esta situación.

Date cuenta de que el Sol con su movimiento hace que este ángulo varíe a lo largo del día, por ello es necesario realizar dos mediciones simultáneamente en dos lugares distintos de la Tierra y así comparar ambos resultados, como puede deducirse de la Figura 3.

Este mismo trabajo de medición de ángulos ya era muy conocido por los árabes, los cuales realizaron gran cantidad de tablas con las razones trigonométricas, y fueron los primeros en introducir algunas de estas razones tales como la tangente. Fue el matemático árabe Al – Kwarizmi quien realizó algunas de las primeras tablas de este tipo.

4.- Completa la siguiente tabla (Tabla 1) que te será de gran utilidad para la resolución de ejercicios más adelante:

	0º / 0 rad.	30º/ π/6 rad.	45º/ π/4 rad.	60º/ π/3 rad.	90º/ π/2 rad.
Seno					
Coseno					
Tangente					

Tabla 1: Razones trigonométricas de algunos ángulos.

Fue gracias a tablas como esta que pudieron observar algunas de las relaciones entre las razones trigonométricas tales como:

$$\tan \alpha = \text{sen}\ \alpha / \cos \alpha$$

Eratóstenes, cuando midió sus ángulos, obtuvo los siguientes resultados:

Estando en Alejandría, a determinada hora sabía que en una ciudad más al sur situada en el mismo meridiano que Alejandría, el Sol caía completamente vertical. En ese momento, midió el ángulo que formaba el Sol con la vertical en Alejandría, obteniendo una medida de 7,2º del mismo modo que has hecho en los ejercicios anteriores. Por tanto, el ángulo formado por los radios terrestres que unen Alejandría y Syenes con el centro formaban también 7,2º. Sabiendo que la distancia entre Alejandría y Syenes que midió Eratóstenes es de 792,228 km., pudo determinar la longitud del radio terrestre.

5.- Plantea el problema en un dibujo con los datos dados y resuélvelo para obtener la medida del radio de la Tierra, de forma que quede algo parecido a lo que hizo Eratóstenes.

Eratóstenes, para calcular el ángulo del Sol con la vertical, utilizó que determinado día del año en la ciudad de Syenes el Sol caía completamente vertical, pero esto no es necesario para realizar este cálculo.

6.- Sabemos que en determinada ciudad A, a las doce del mediodía del 13 de Agosto, el Sol forma un ángulo de 33º con la vertical, y en una ciudad B, situada en el mismo meridiano que A pero más al Sur, a la misma hora y el mismo día, un edificio de 50 metros de alto proyecta una sombra de 24,17 metros. Conociendo la longitud del radio de la Tierra que has calculado antes, ¿a qué distancia están estas dos ciudades?

Una vez obtuvo este resultado, Eratóstenes fue capaz de llevar a cabo otras mediciones tales como el radio de la Luna, el radio del Sol, la distancia a la Luna y la distancia al Sol.

Primero observó que, en un eclipse lunar, el tiempo que pasa desde que la Luna empieza a oscurecerse hasta que se eclipsa del todo es la mitad del tiempo que pasa desde que se eclipsa del todo hasta que vuelve a aparecer. Por lo tanto el esquema quedaría como muestra la Figura 4.

La trigonometría es empleada en el campo de la astronomía para medir algunas de las distancias.

7.- Si desde la Tierra observamos dos estrellas A y B que están ambas a una distancia de 10 años luz de la Tierra y forman un ángulo de 150º que medimos desde la Tierra, calcula la distancia a la que se encuentran la una de la otra sin emplear la calculadora para obtener directamente ninguna razón trigonométrica empleando la tabla del ejercicio 4.

8.- Si en determinada noche, desde un observatorio se ve a Marte y Júpiter formando un ángulo de 20º y sabemos que Marte se encuentra a una distancia de la Tierra de 100 millones de km. y Júpiter se encuentra a una distancia de 550 millones de km., calcula a qué distancia están el uno del otro sin emplear la calculadora para obtener directamente ninguna razón trigonométrica empleando la tabla del ejercicio 4.

El matemático francés François Viéte, nacido en el siglo XVI, empleó la trigonometría para plantear un nuevo tipo de ecuaciones que implican las razones trigonométricas y cuya resolución puede ser muy difícil o incluso imposible. Trata de resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

9.- $\cos^2(x) - 3 * \operatorname{sen}^2(x) = 0$

10.- $\operatorname{tg}(2*x) = -\operatorname{tg}(x)$

11.- $\operatorname{sen}^2(x) - \cos(3*x) = 5/2$

4.5. Revisión.

Con esta actividad, esperamos que los alumnos comprendan la importancia de la trigonometría, así como para qué ha sido empleada en el pasado. Las actividades tienen como objetivo mejorar la asimilación de los contenidos, pues los alumnos trabajarán en:

- Manejar con soltura las razones trigonométricas de un ángulo, de su doble y mitad, así como las transformaciones trigonométricas usuales.
- Utilizar los teoremas del seno y coseno y las fórmulas trigonométricas usuales para resolver ecuaciones trigonométricas, así como aplicarlas en la resolución de triángulos como consecuencia de la resolución de problemas geométricos del mundo natural y geométrico.
- Conocer la historia de esta rama de las matemáticas a través de la resolución de problemas para asimilar mejor la teoría relativa a este tema.

Finalmente, debo mencionar que, en el caso práctico en que los alumnos muestren interés en estas actividades, convendría incrementar el número de estas. Pero a fin de ejemplificar esta forma de trabajar, las actividades planteadas son suficientes.

5. PROPUESTA DE APLICACIÓN PRÁCTICA EN EL AULA: CÓNICAS.

El siguiente ejemplo tratará sobre el tema de las cónicas impartido en el curso de 1º de Bachillerato. Al igual que en el caso anterior, empezaremos por estudiar la historia de las cónicas de forma resumida para ver de qué modo podemos utilizarla para la enseñanza de este tema. Para la búsqueda de la información emplearemos los apuntes de clase de Sols Lucía (UCM, 2016/2017) y el libro de Boyer y Merzbach (2011).

5.1. Historia de las cónicas.

Al enfrentarse al problema de la duplicación del cubo, Hipócrates de Quíos pudo establecer ciertas condiciones por las que realizarla mediante el empleo de curvas que cumpliesen determinada propiedad. Pero fue Menecmo, discípulo de Platón y Eudoxos, quien se percató de que estas curvas se encontraban muy cerca, y de hecho encontró toda una familia de curvas que surgían de cortar un cono mediante un plano: las cónicas (véase la Figura 5).

Así, es a Menecmo a quien se atribuye el descubrimiento de la elipse, la parábola y la hipérbola. De hecho, encontró la elipse mientras buscaba la solución para el problema de Delfos. Este, partiendo de un cono de una sola hoja con un ángulo recto en el vértice, descubrió que al cortarlo con un plano perpendicular a una generatriz se formaba una curva que hoy expresamos con la ecuación $y^2 = lx$, donde l es una constante que depende de la distancia del plano al vértice.

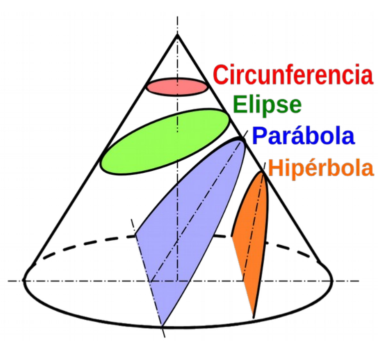

Figura 5: Cono cortado formando las cuatro cónicas.
Fuente: Wikipedia.

Euclides también escribió cuatro libros sobre cónicas, pero su tratado se perdió, al igual que otro trabajo de Aristarco. No obstante, ambos fueron rápidamente superados por el trabajo de Apolonio sobre cónicas.

Arquímedes también trabajó con estas curvas, y llegó a calcular el área de las elipses de ecuación $x^2/a + y^2/b = 1$ mediante la fórmula $A = \pi ab$, aunque no supo cómo calcular el área de segmentos generales de las elipses e hipérbolas. Sin embargo, sí que fue capaz de resolver la cuadratura de la parábola cuando probó que el área de un segmento parabólico es igual a cuatro tercios del área del triángulo con la misma base y altura.

Fue en su tratado de cónicas que Apolonio de Pérgamo llegó a superar a todos sus predecesores por dos aportaciones. En primer lugar, mostró que de un mismo cono podían obtenerse todos los tipos de curvas cónicas, sin importar que este fuera recto, agudo u oblicuo, tan solo variando la posición del plano por el que se corta. Además, Apolonio reemplazó al cono de una sola hoja (cono de helado), por el cono de dos hojas (dos conos de helado unidos por sus vértices), acercando la definición de las cónicas a nuestra actual definición e introduciendo los nombres por los que hoy las conocemos.

Sin embargo, no llegó a mostrar que en realidad da igual el tipo de cono que se emplee, que se pueden obtener todos los tipos de curvas cónicas. Aun así, otra de las aportaciones que realizó fue derivar unas propiedades para las curvas que, traducidas a nuestro actual lenguaje algebraico, se corresponden con las ecuaciones que hoy conocemos.

A partir de estas relaciones en el plano, Apolonio prescindió del cono y continuó deduciendo otras muchas propiedades para las cónicas, cuyos resultados se emplearían más adelante en astronomía (elipses) o para el estudio de gases (hipérbolas), como las intersecciones entre ellas.

Más tarde sería Papus de Alejandría quien emplearía las hipérbolas y sus propiedades para dar una solución a la trisección del ángulo. El árabe Omar Khayyam también utilizó la parábola y la hipérbola para resolver ecuaciones de tercer grado al verlas como la intersección de dos de estas curvas. También se emplearían en los movimientos parabólicos en física.

Finalmente, fue Descartes en su *La géométrie* quien dio las coordenadas de las ecuaciones de las curvas cónicas.

5.2. Elección del material.

A partir del estudio de la historia de las cónicas, parece que podríamos emplear los problemas de la duplicación del cubo, la cuadratura de la parábola y la trisección del ángulo para mostrar a los alumnos la utilidad de las cónicas. Igualmente, podríamos utilizar la resolución de las ecuaciones de tercer grado para mostrar el trabajo realizado con las cónicas.

Duplicación del cubo: respecto a este problema, Hipócrates de Quíos redujo el problema a encontrar dos medias proporcionales. Dado un segmento de longitud *a* (siendo *a* el lado del cubo que queremos duplicar), debemos encontrar un segmento de longitud x tal que se cumpla que $x^3 = 2a^3$ (siendo x el lado del cubo con volumen doble). Hipócrates vio que esto era equivalente a dar dos segmentos de longitudes x e y tales que $a/x = x/y = y/2a$.

Después, Menecmo redujo este problema a calcular la intersección de dos parábolas o de una parábola con una hipérbola (véase la Figura 6), que en notación actual sería:

$x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$, de lo que obtenemos que $x^3 = 2a^3$

$x^2 = ay$, $xy = 2a^2$, de lo que obtenemos que $x^3 = 2a^3$

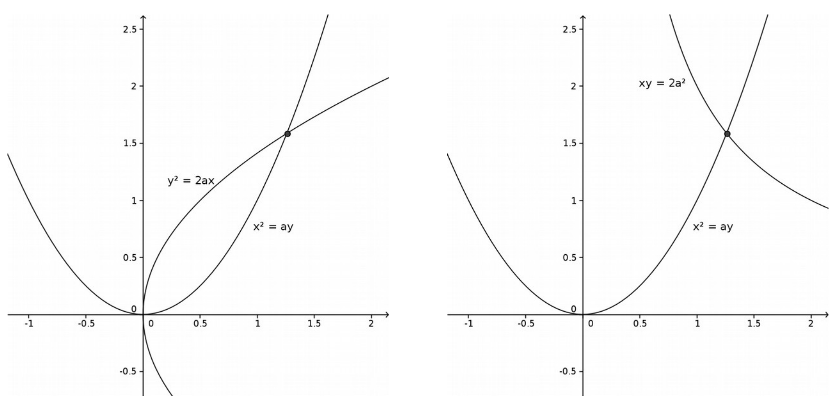

Figura 6: Intersección de cónicas para la duplicación del cubo.

Así, el punto de corte de las dos cónicas será $x = a2^{1/3}$, $y = a4^{1/3}$, siendo por tanto la coordenada x el lado del cubo que buscamos.

Cuadratura de la parábola: fue Eudoxos mediante el método de exhaución quien determinó la fórmula para la cuadratura de la parábola. Dado el arco de parábola, determinó el triángulo de base la cuerda de la parábola y altura máxima dentro de la parábola. Tras esto, iterando este proceso con las cuerdas de parábola determinadas por los lados del triángulo, se obtiene que la suma infinita de todas las áreas de los triángulos es igual al área buscada (véase la Figura 7). Si el área del primer triángulo formado es T, el área de los dos triángulos que aparecen en el siguiente paso es igual a T/4. Así, el área total viene dada por la fórmula

$$T + T/4 + T/4^2 + T/4^3 + \ldots + T/4^n + \ldots$$

La cual es igual a 4/3 de T.

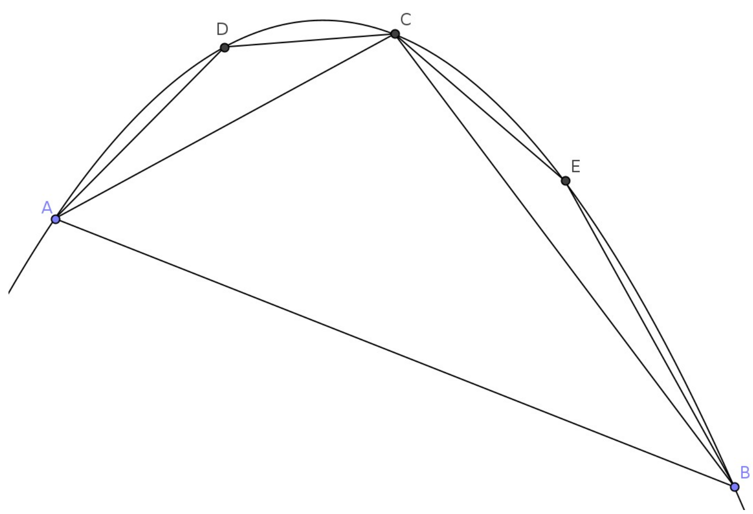

Figura 7: Triángulos para la cuadratura de la parábola por el método de exhaución.

Trisección del ángulo: Papus desarrolló dos métodos para la trisección del ángulo. En uno de ellos, parte de considerar uno de los segmentos de los dos que forman el ángulo, como la diagonal de un rectángulo con lado el otro segmento ABCO. Luego por A traza una hipérbola con asíntotas las rectas por CO y CB. Tomando A como el centro de la circunferencia de radio dos veces OB, esta interseca a la hipérbola en P. Por P, trazando la perpendicular PT a CB, la línea por OT y paralela a AP triseca el ángulo. Este procedimiento queda ilustrado en la Figura 8.

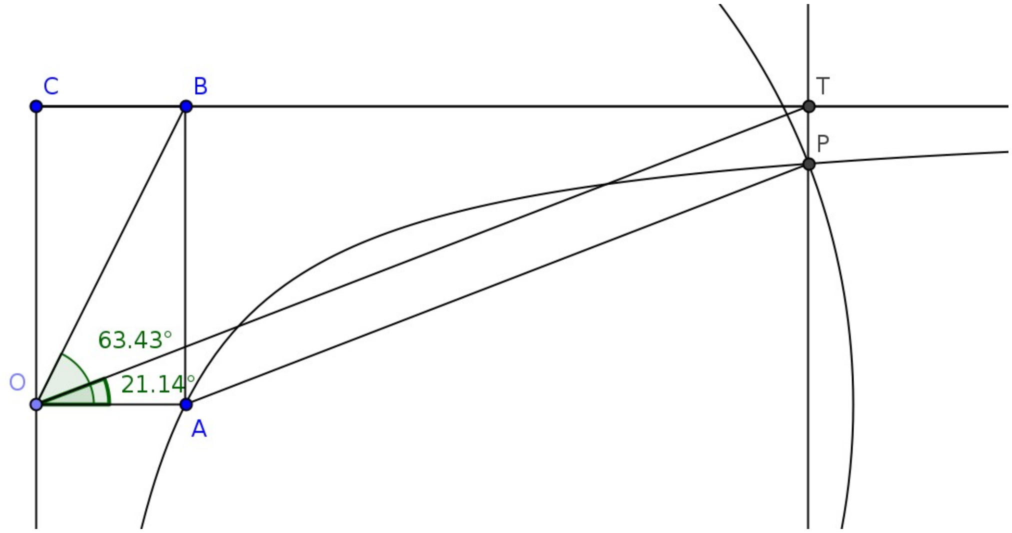

Figura 8: Ejemplo de la trisección del ángulo.

Ecuaciones de tercer grado: el árabe Omar Khayyam encontró que realizando el cambio de variable $x^2 = 2py$ (ecuación de la parábola) en una ecuación de tercer grado y despejando adecuadamente, llegaba a una igualdad de una parábola con una hipérbola; es decir, reducía la búsqueda de las raíces reales de la ecuación a calcular la intersección de dos curvas.

Así, para la ecuación general de tercer grado $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, modificándola adecuadamente, llegaba a la igualdad $x^2 = (-bx-c)/(x+a)$, cuya resolución podía abordar como la intersección de dos cónicas. Así, las componentes x de los puntos de corte serían las raíces de la ecuación, como muestra la Figura 9.

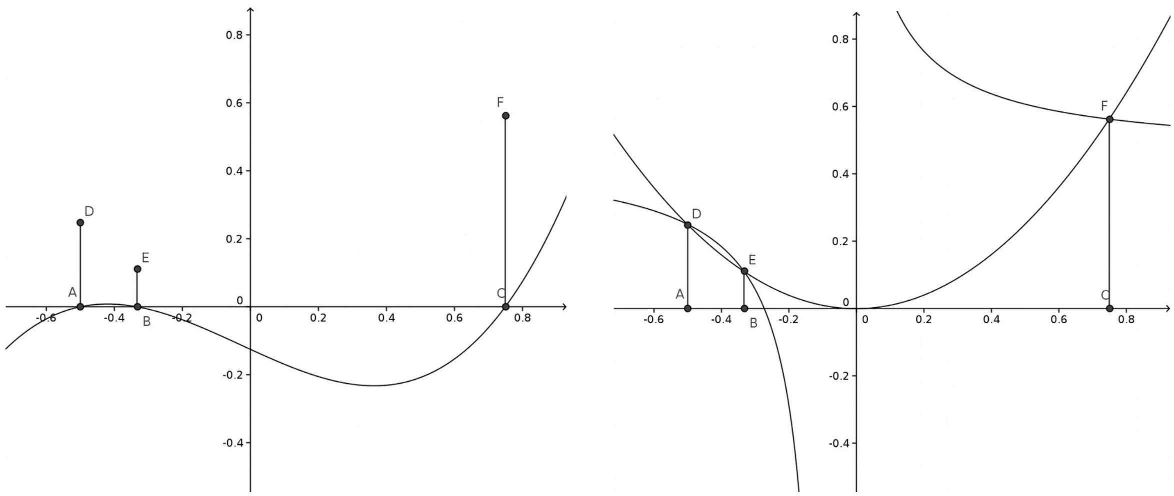

Figura 9: Ejemplo de la resolución de ecuaciones de tercer grado.

5.3. Cuestiones para plantear.

Al dar inicio al nuevo tema de cónicas, se les explicará a los alumnos cómo surgen estas curvas al aplicar cortes a los conos de diversos modos y cómo aparecieron cuando buscaban resolver el problema de la duplicación del cubo.

A partir de aquí, antes de presentar cada curva, se planteará el problema de la lista anterior para el que se emplearon, a fin de que vean la utilidad de estas curvas y al final sean capaces de resolver estos problemas con el lenguaje propio de la geometría analítica actual.

Siguiendo el orden usual en el que se explican estas curvas, lo primero que se hará será, partiendo de la circunferencia, presentar la elipse, sus propiedades, su definición y sus ecuaciones. Para mostrar la utilidad de esta curva, se plantearán unas actividades relacionadas con los movimientos planetarios.

Tras esto, se continuará con las explicaciones de la parábola, donde se planteará el problema de la duplicación del cubo y cómo las parábolas intervienen en él, planteando unas actividades para que lleguen a comprender la utilidad de las parábolas en este problema y en lanzamientos parabólicos en física. También se planteará, como colofón a estas explicaciones, el problema de la cuadratura de la parábola, en una serie de pasos para que los alumnos sean capaces de deducir la fórmula del área utilizando sus conocimientos de análisis (será necesario saber derivar y sumar series).

En último lugar, se darán las explicaciones concernientes a la hipérbola, para ya poder proceder a presentar los problemas de la trisección del ángulo y las ecuaciones de tercer grado, planteando para ello una serie de actividades que terminen en la resolución de estos problemas (aunque sólo sean casos particulares). Para ello, podría emplearse software como Geogebra con la intención de mejorar la visualización y realizar los cálculos.

5.4. Las actividades.

A continuación se expone un ejemplo de esta forma de plantear las cónicas:

LAS CURVAS CÓNICAS

En el siglo V a.C., la ciudad de Delfos era conocida por ser el hogar de uno de los principales oráculos de aquel tiempo. Fue allí donde los habitantes de Atenas acudían en busca de ayuda para acabar con la plaga de fiebre tifoidea que asolaba su ciudad. La respuesta que recibieron fue que debían construir un nuevo altar en forma de cubo que debía duplicar el volumen del que ya existía.

Aunque los atenienses no lo lograron, el problema de la duplicación del cubo no fue olvidado, y gran cantidad de estudiosos se enfrentaron a él. Pero no fue hasta Hipócrates de Quíos que se produjo el primer avance importante, puesto que redujo el problema a encontrar dos valores que cumpliesen unas determinadas relaciones, aunque no logró continuar más allá.

Fue Menecmo en el siglo IV a.C. quien dio el siguiente paso al comprobar que el problema consistía en buscar una curva muy concreta que encontró en los conos. Al hacer esto, no sólo descubrió la curva que buscaba, sino que encontró toda una familia de curvas: las cónicas.

La primera de estas curvas es la elipse, que encontramos presente en muchos lugares tales como los movimientos planetarios.

1.- Enuncia la definición de la elipse y explica con tus propias palabras cómo hay que cortar un cono (cucurucho de helado) para obtener este tipo de curvas.

2.- La órbita de la Tierra alrededor del Sol tiene forma elíptica con el Sol en uno de sus focos. El semieje mayor mide aproximadamente 149 millones de kilómetros y la excentricidad de la órbita es de 1/62. Calcula la distancia mínima y la distancia máxima de la Tierra al Sol. ¿Sabrías decir en qué estación del año nos encontramos cuando la Tierra está en cada uno de esos dos puntos?

En el problema de la duplicación del cubo interviene otra de las curvas cónicas: la parábola. La relación que Hipócrates dedujo que debía cumplirse para resolver este problema se expresa, en nuestro lenguaje actual, como:

$$a/x = x/y \ , \ x/y = y/2a$$

siendo *a* el lado del cubo cuyo volumen queremos duplicar:

3.- Enuncia la definición de la parábola y explica con tus propias palabras cómo hay que cortar un cono (cucurucho de helado) para obtener este tipo de curvas.

4.- A partir de las dos igualdades anteriores, deduce las ecuaciones de dos parábolas. Realiza un dibujo aproximado de ambas y encuentra el punto de corte. ¿Sabrías decir si ambas ecuaciones son funciones o no? Si x es el lado del cubo que buscamos, comprueba que este tendría el doble de volumen que el original.

5.- Una parábola de vértice (4,1) y directriz y = 5 describe la trayectoria seguida por un objeto que ha sido lanzado desde una altura de 1 metro. Calcula la ecuación de la parábola y comprueba que para x = 0 se encuentra a un metro de altura. Si hay una pared en la dirección de la trayectoria y a 6 metros desde donde se lanza, calcula a qué altura de la pared se producirá el impacto. ¿Sabrías calcular la altura máxima que alcanza el objeto en su trayectoria hacia la pared?

Otro de los problemas relacionados con las parábolas es el cálculo de áreas bajo estas curvas. En este caso fue el griego Eudoxo quien calculó la fórmula para el área encerrada entre la parábola y una cuerda, como por ejemplo la de la Figura 10.

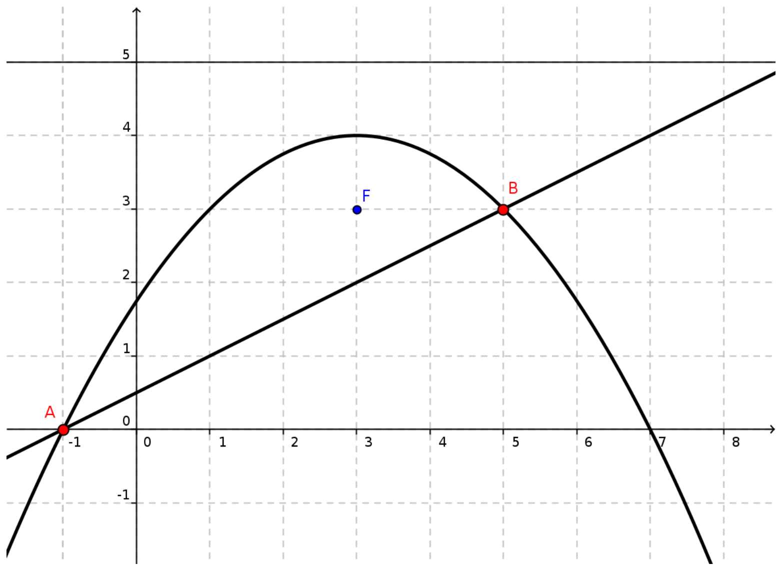

Figura 10: Ejercicio de cuadratura de la parábola.

Para ello, dibujó el triángulo de base la cuerda AB y altura máxima dentro de la parábola. Como al trazar este triángulo no rellenaba todo el área que buscaba, sobre los lados de este dibujó del mismo modo otros dos triángulos, como se muestra en la Figura 11.

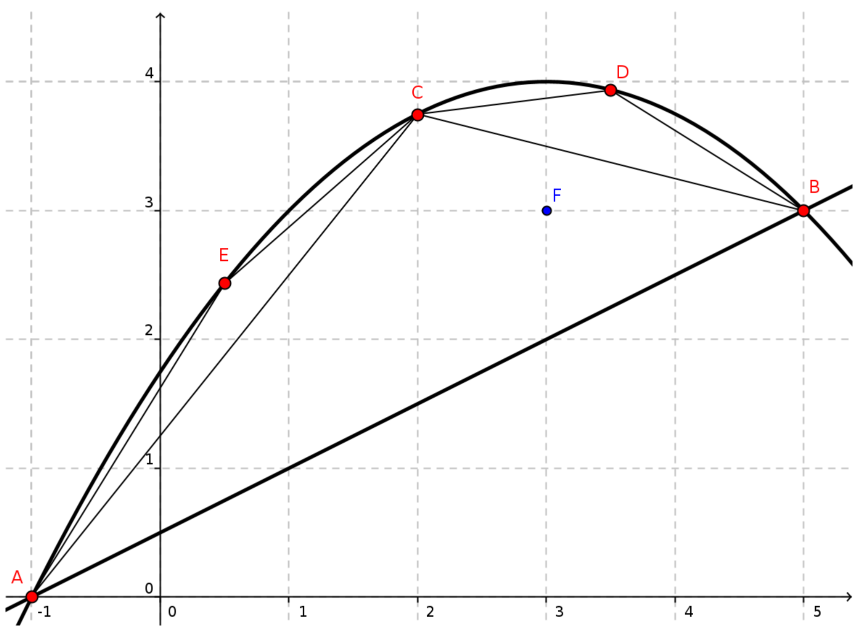

Figura 11: Ejercicio de la cuadratura de la parábola con los primeros triángulos inscritos.

6.- A partir de los dibujos anteriores, calcula las coordenadas del punto C y el área del triángulo ABC. Ten en cuenta que tendrás que realizar derivadas para calcular el punto C, punto de corte de la recta tangente a la parábola y paralela al segmento AB.

7.- Haz lo mismo con los dos nuevos triángulos BCD y ACE. Establece una relación entre la suma de las áreas de estos dos nuevos triángulos en comparación con el primero (divide el área de los dos pequeños entre el grande).

Con esto podemos establecer que el área total será la suma de la infinidad de triángulos que se van formando al continuar con este proceso. Así, Eudoxo probó que si el área del primer triángulo ABC es T, entonces, la suma de todos los triángulos sería

$$T + T/4 + T/4^2 + T/4^3 + \dots + T/4^n + \dots$$

8.- Realiza la suma de esta serie y calcula el resultado para el caso de los ejercicios anteriores.

Otro de los grandes problemas de la antigüedad es la trisección del ángulo; es decir, dividir un ángulo dado en tres iguales. En este caso, fue el matemático francés (de origen español) Papus quien elaboró un método. Para ello se valió de otra de las curvas cónicas: la hipérbola.

9.- Enuncia la definición de la hipérbola y explica con tus propias palabras cómo hay que cortar un cono (dos cucuruchos de helado unidos por sus vértices) para obtener este tipo de curvas.

El método empleado por Papus consiste en los siguientes pasos, los cuales están ilustrados en la Figura 12:

- Parte de considerar un segmento de los dos que forman el ángulo, como la diagonal de un rectángulo con lado el otro segmento ABCO.

- Luego, por A traza una hipérbola con asíntotas las rectas por CO y CB.

- Tomando A como el centro de la circunferencia de radio dos veces OB, esta interseca a la hipérbola en P.

- Por P, trazando la perpendicular PT a CB, la línea por OT y paralela a AP, triseca el ángulo.

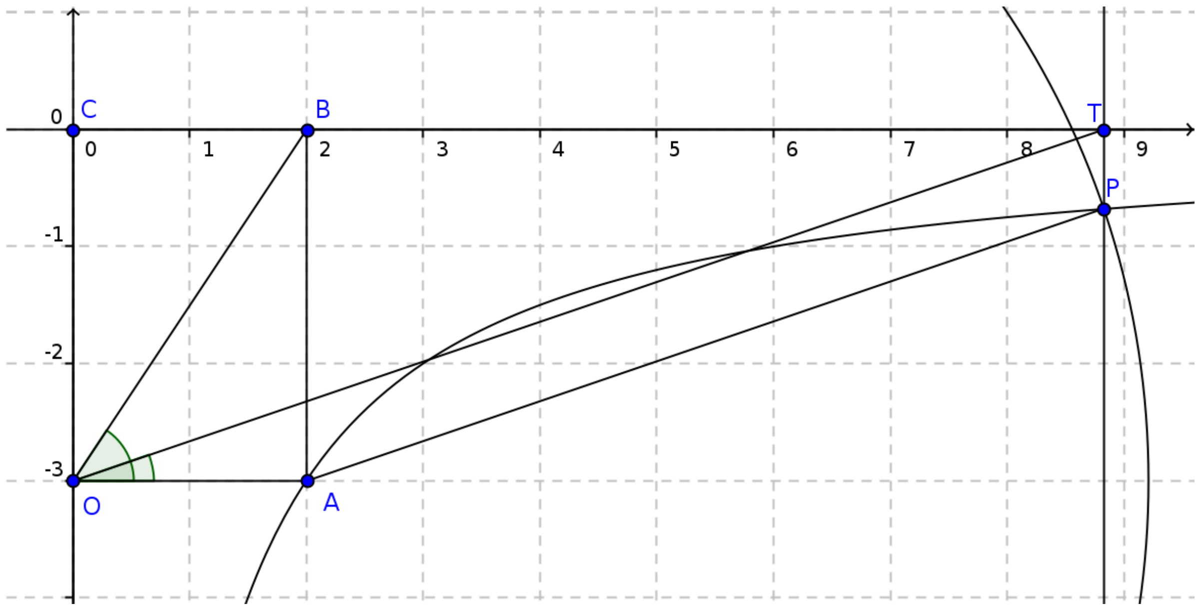

Figura 12: Ejercicio de la trisección del ángulo.

10.- A partir del dibujo de la Figura 12, calcula:

a) La ecuación de la hipérbola que pasa por A y tiene por asíntotas los dos ejes.

b) La distancia OB y la ecuación de la circunferencia de centro A y radio 2 veces la distancia OB.

c) El punto de corte P de la circunferencia con la hipérbola.

d) El punto T, proyección del punto P sobre el eje y = 0.

e) Calcula los ángulos AOB y AOT, y comprueba que AOT es un tercio del AOB.

Por último, otra de las aplicaciones de la hipérbola fue descubierta por el árabe Omar Khayyam, quien realizando el cambio de variable $x^2 = 2py$ (ecuación de la parábola) en una ecuación de tercer grado de la forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ y despejando apropiadamente, logró transformar la ecuación de tal forma que sólo tuvo que calcular los puntos de intersección de dos cónicas.

11.- Tomando la ecuación de tercer grado $x^3 + x^2/12 – 11x/24 – 1/8 = 0$, realiza el cambio de variable $x^2=2py$, y opera hasta que la ecuación quede de la forma 2py = …, y deshaz el cambio de variable tal que te quede algo de la forma x^2 = ….

Ahora, empleando el programa Geogebra, representa las dos curvas cónicas (parábola e hipérbola) y la ecuación de tercer grado. Comprueba gráficamente en el programa que las proyecciones de los puntos de corte de las dos cónicas sobre el eje y = 0 son las raíces de la ecuación original. ¿Crees que habrías sido capaz de encontrar las raíces de la ecuación empleando Ruffini?

5.5. Revisión.

Con esta actividad, aspiramos a que los alumnos se percaten de las aplicaciones prácticas de las cónicas y cómo se pueden emplear para resolver algunos problemas. Las actividades propuestas mezclan la geometría analítica vista en temas anteriores y el análisis para así dar una visión global de las matemáticas y ver cómo se relacionan los diferentes temas entre sí. Dado que algunas podrían ser de un nivel algo complejo para los estudiantes de Bachillerato, éstas podrían modificarse para dar más facilidades a la hora de su resolución. Así, con estas actividades los alumnos trabajarían en:

- El manejo de las ecuaciones de las distintas curvas cónicas.
- Las propiedades de las curvas cónicas.
- La resolución de problemas de geometría analítica.
- El cálculo de derivadas.
- Conocer la historia de esta rama de las matemáticas a través de la resolución de problemas para asimilar mejor la teoría relativa a este tema.

Finalmente, debo mencionar que, en el caso práctico en que los alumnos muestren interés en estas actividades, convendría incrementar el número de estas. Pero a fin de ejemplificar esta forma de trabajar, las actividades planteadas son suficientes.

6. PROPUESTA DE APLICACIÓN PRÁCTICA EN EL AULA: ANÁLISIS.

El siguiente ejemplo trata sobre el tema de análisis del curso de 2º de Bachillerato, tanto las derivadas como las integrales. Comenzaremos por estudiar la historia del desarrollo de este tema para ver cómo emplearla en la enseñanza en las aulas de bachillerato. Para la búsqueda de la información emplearemos los apuntes de clase de Sols Lucía (UCM, 2016/2017) y el artículo de Campuzano (2015).

6.1. Historia del cálculo.

Empezaremos por remontarnos hasta los griegos y musulmanes, los cuales desarrollaron el cálculo de rectas tangentes y áreas de algunas curvas tales como las cónicas, así como la búsqueda de máximos y mínimos. Estos, aunque no disponían del lenguaje propio del álgebra que tenemos hoy día, lograron realizar estos cálculos en casos concretos y dieron una definición de tangente muy pobre: tangente es una línea que toca a una curva en un sólo punto pero sin cortarla. Esta definición sólo es apropiada para la circunferencia.

Mas tarde, Apolonio de Pérgamo dio las definiciones de tangente a secciones cónicas y las calculó en cada caso.

Cabe destacar que los griegos también abordaron problemas clásicos como: de todas las figuras planas con el mismo perímetro, ¿cuál es la de mayor área? Aunque no tuvieron mucho éxito por no disponer del lenguaje y técnicas necesarias, hoy día sabemos que es la circunferencia.

En el siglo XVII, Pierre de Fermat abordó un problema clásico: dada una línea, dividirla en dos partes de tal manera que el producto de las partes sea un máximo. A partir de esto empezó a desarrollar el germen de lo que más tarde sería el cálculo de derivadas. Fermat también desarrolló el método para el cálculo de tangentes que hoy día se emplea (aunque con más rigor).

En cuanto a las integrales, Fermat pudo calcular al área bajo funciones mediante la subdivisión en intervalos apropiados y la suma de áreas de rectángulos.

A finales de este siglo ya se habían comprendido perfectamente los métodos para el cálculo de máximos, mínimos y tangentes, y disponían de fórmulas para realizar los cálculos. Sin embargo, aún no había aparecido el término de derivada ni integral.

Son Newton y Leibniz (Figura 13) a quienes consideramos como los creadores del cálculo, aunque ambos desarrollaron las mismas ideas de forma independiente y empleando un lenguaje propio y puntos de vista distintos. Newton lo consideró desde un punto de vista físico en el que desarrolló su método de fluxiones, mientras que Leibniz lo desarrolló desde un punto de vista matemático y estableció la notación que hoy día empleamos (aunque en física se sigue empleando la notación de Newton).

Figura 13: Newton (derecha) y Leibniz (izquierda).
Fuente: https://acelerandolaciencia.wordpress.com/2014/01/12/newton-leibniz-y-el-calculo-infinitesimal/

El mayor aporte de Newton y Leibniz fue darse cuenta de que integral y derivada son conceptos mutuamente inversos, desarrollando de este modo el Teorema Fundamental del Cálculo.

Newton también desarrolló métodos para la cuadratura de áreas a partir de sus estudios de integrales, dando fórmulas generales para el área bajo curvas.

A partir de aquí empezó a establecerse el cálculo de integrales y derivadas con mayor rigor y desarrollándose técnicas más avanzadas como las derivadas parciales, series de Taylor o ecuaciones diferenciales, lo cual excede el nivel de Bachillerato.

6.2. Elección del material.

A partir de lo visto en el apartado anterior, veremos una serie de materiales que podrían emplearse para lo que buscamos.

Segmento de Fermat: Fermat se planteó cómo dividir un segmento dado de longitud B en dos partes tal que el producto de las longitudes de ambas partes fuera máximo. Esto es un problema de máximos. Para dar respuesta a esto, comenzó dividiendo el segmento en uno de longitud A y otro de longitud B – A, como se muestra en la Figura 14. Multiplicando ambas partes obtenemos:

$$A(B - A) = AB - A^2.$$

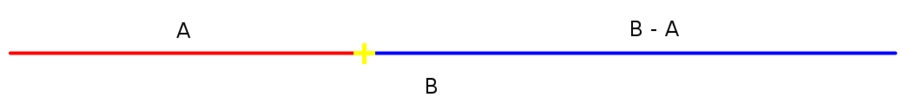

Figura 14: Esquema del problema del segmento de Fermat.

Fermat sabía de Pappus que si un problema tiene en general dos soluciones, deberá tener una sola en caso de un máximo. Así, si suponemos que tiene dos soluciones, dividamos el segmento en dos partes tales que midan A + E, y B – A – E. Multiplicando queda

$$(A + E)(B - A - E) = AB - A^2 - 2AE + BE - E^2$$

Considerando a Pappus, como solo podía haber una solución, ambas tenían que ser iguales, por lo que Fermat las igualó

$$AB - A^2 = AB - A^2 - 2AE + BE - E^2 \ ; \quad 2AE + E^2 = BE$$

De donde obtenemos que $2A + E = B$. Por tanto $A = B/2$.

Vemos como Fermat divide por E, y que luego considera E igual a cero sin dar explicaciones de esto.

Cálculo de tangentes de Fermat: Fermat empleaba la siguiente fórmula para el cálculo de tangentes que hoy seguimos empleando: $(f(x + h) - f(x)) / h$.

Con esto expresaba la idea de tomar una recta secante por el punto en el que quería calcular la tangente y otro muy próximo, y hacer que se juntaran tal y como se ilustra en la Figura 15.

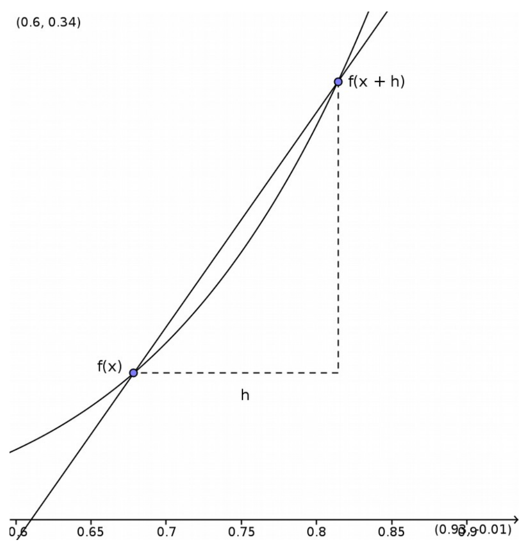

Figura 15: Esquema del cálculo de tangentes de Fermat.

Esta es la misma fórmula que emplearon más tarde para derivar una vez aportaron más rigor a lo que se hacía.

Integrales de Fermat: desconociendo el término de integral, lo que hizo fue sumar áreas bajo curvas. Para ello dividía el eje de las x en intervalos escogidos muy apropiadamente y sumaba las áreas de rectángulos para acercarse al área que buscaba, como queda reflejado en la Figura 16.

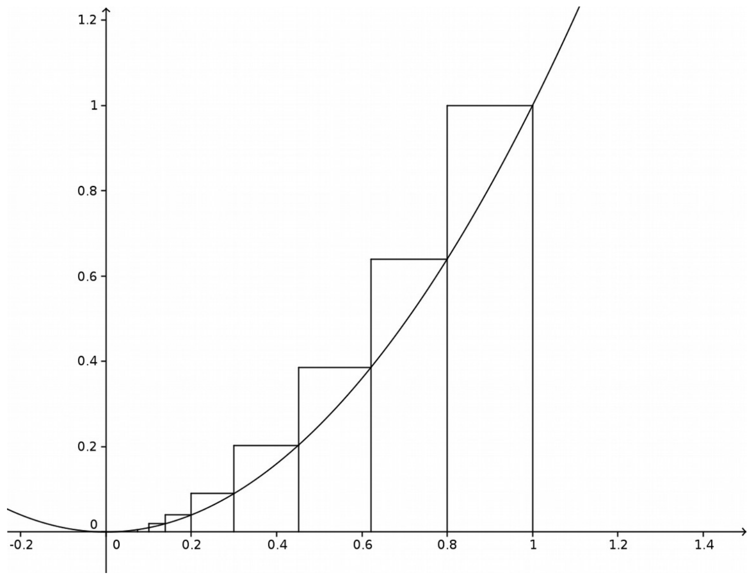

Figura 16: Esquema de la integral de Fermat por suma de áreas.

Sumas de Riemann: las integrales de Riemann se definieron a partir de sumas similares a las realizadas por Fermat, por exceso y por defecto (suma superior y suma inferior), y tomando el límite de estas.

6.3. Cuestiones para plantear.

Este tema se iniciará hablando de la búsqueda de tangentes, máximos, mínimos y áreas por los griegos y musulmanes en la antigüedad, obteniéndolas para casos muy concretos tales como las realizadas por Apolonio de Pérgamo. También se verá la definición de tangente de los griegos para comprobar que solo es válida para la circunferencia.

Después se presentará el problema isoperimétrico con unos ejercicios de integración para calcular el área del círculo.

Seguidamente, se planteará el problema de Fermat de la división del segmento para que los alumnos continúen sus pasos y vean cómo fue el inicio del cálculo de derivadas y optimización.

De Fermat también se explicará cómo dedujo su fórmula para las tangentes y se planteará a los alumnos unos ejercicios de cálculo de derivadas para funciones elementales.

A continuación, se seguirá con Newton y Leibniz, planteando dos actividades de derivación con las notaciones usuales y la notación seguida por Newton y los físicos contextualizado en un ejemplo real. Se resaltará el importante aporte que supuso el Teorema Fundamental del Cálculo y se darán algunos ejercicios para llevar a cabo la comprobación de este resultado.

Finalmente, se planteará la medición de algunas áreas por el método seguido por Fermat para que se compruebe mediante el cálculo integral actual. A este respecto, también podría mencionarse a Riemann y cómo definió su integral mediante las sumas superiores e inferiores.

6.4. Las actividades.

A continuación, se expone un ejemplo de esta forma de plantear el cálculo:

EL DESARROLLO DEL CÁLCULO

Desde la antigüedad, tanto griegos como musulmanes han dedicado tiempo a la búsqueda de tangentes, máximos y mínimos de las curvas que conocían y que descubrían con el tiempo, así como a la medición de áreas de figuras geométricas conocidas y áreas bajo curvas.

Muchos desarrollaron sus propios métodos particulares para algunas curvas concretas, pero entonces no tenían muy clara ni siquiera la definición de tangente: tangente es una línea que toca a una curva en un solo punto pero sin cortarla.

1.- Menciona al menos tres curvas para las que la definición de tangente de los griegos no es del todo valida. Menciona una para la que sí lo sea.

Mas tarde, el griego Apolonio de Pérgamo, a partir de su trabajo con las curvas cónicas, pudo calcular las tangentes a esas curvas.

2.- Calcula la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = (x+1)/(x-1)$ en el punto $x = 3$. Calcula en qué otro punto de la curva la tangente por ese punto es paralela a la que acabas de calcular.

3.- Dada la curva $x^2/5 + y^2/10 = 1$, calcula en qué puntos la pendiente de la recta tangente es igual a 1/2 y -1/2.

4.- Calcula en cuántos puntos corta la recta tangente en $x = 0$ a la curva
$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$.

Uno de los problemas clásicos a los que se enfrentaron los griegos fue el de isoperimetría: de todas las figuras planas con el mismo perímetro, ¿cuál es la de mayor área? Hoy día ya sabemos la respuesta: el círculo.

5.- Deduce lo que se acaba de explicar integrando la fórmula para el área de una circunferencia de radio R. Empieza planteando la ecuación de la circunferencia centrada en el punto apropiado. Puede que necesites hacer el cambio de variable $x = R*\mathrm{sen}(t)$.

En el siglo XVII, Pierre de Fermat abordó un problema clásico: dada una línea, dividirla en dos partes de tal manera que el producto de las partes sea un máximo. A partir de esto, empezó a desarrollar el germen de lo que más tarde sería el cálculo de derivadas. El método que siguió consistió en dividir el segmento de longitud B del modo mostrado en la Figura 14.

A partir de aquí, calculó el producto de las longitudes de ambos segmentos.

Fermat sabía de Pappus que si un problema tiene en general dos soluciones, deberá tener una sola en caso de un máximo. Así, suponiendo que tiene dos soluciones, dividamos el segmento en dos partes tales que midan A + E, y B – A – E, y multipliquemos ambas.

Con esto, teniendo ambas soluciones, por lo que sabía de Pappus, ambas debían ser iguales, por lo que las igualó, y, tras simplificar, obtuvo la solución cuando al final hizo E = 0.

6.- Siguiendo el procedimiento descrito, encuentra la solución. ¿Has realizado alguna operación que no deberías haber podido hacer?

Fermat empleaba la siguiente fórmula para el cálculo de tangentes que hoy seguimos empleando: $(f(x + h) – f(x)) / h$. Con esto expresaba la idea de tomar una recta secante por el punto en el que quería calcular la tangente y otro muy próximo, y hacer que se juntaran. Hoy día, para calcular derivadas de funciones empleamos el límite de esta expresión.

7.- Calcula la derivada mediante el cálculo del límite de la fórmula de Fermat para las siguientes funciones: π ; x^2 ; $x^3 – x + 1$; x^n ; $1/x$; $1/x^n$; $\sqrt{x}$; $sen(x)$. ¿Coinciden con las derivadas que conoces?

Newton y Leibniz son considerados como los creadores del cálculo. Ambos desarrollaron las mismas ideas de forma independiente y empleando un lenguaje propio y puntos de vista distintos. Newton lo consideró desde un punto de vista físico desde el que desarrolló su método de fluxiones, mientras que Leibniz lo desarrolló desde un punto de vista matemático y estableció la notación que hoy día empleamos (aunque en física se sigue empleando la notación de Newton).

Newton empleaba funciones del tipo $x(t)$ que modelizaban fenómenos físicos en función del tiempo, y en lugar de expresar la derivada como x', x'',… , escribía la x con un punto encima por cada derivada.

8.- Desde el borde de un acantilado de 100 metros de altura se lanza un proyectil que sigue la trayectoria descrita por la ecuación $x(t) = -t^2/2000 + 100$. Trabajando con la notación de Newton, calcula la ecuación de la velocidad y la distancia que recorre antes de caer al suelo.

El mayor aporte de Newton y Leibniz fue darse cuenta de que integral y derivada son conceptos mutuamente inversos, desarrollando de este modo el Teorema Fundamental del Cálculo.

9.- Para las siguientes funciones, calcula su derivada y la integral de esta para comprobar que integral y derivada son conceptos mutuamente inversos: x^n ; $1/x$; $1/x^n$; $sen(x)$; $ln(x)$; $\sqrt{x}$; $-2/(x+5) + 9/(2(x+5)^2)$; $(x^3 ln(5x))/3 – x^3/9$; $- cos^4(x)/4$.

En cuanto a las integrales, Fermat, desconociendo el término de integral, lo que hizo fue sumar áreas bajo curvas. Para ello dividía el eje de las x en intervalos escogidos muy apropiadamente y sumaba las áreas de los rectángulos que formaba para acercarse al área que buscaba (observa la Figura 16).

10.- Calcula el área bajo la función f(x) = x en el intervalo [0,1]. Para ello sigue los siguientes pasos:

a) Si n es el número de intervalos en los que dividir el intervalo [0,1] todos de igual tamaño, calcula estos intervalos. Para ello comienza desde el 0 y suma el ancho de los intervalos (que será 1/n) para ir consiguiendo los extremos de los intervalos.

b) Para cada intervalo, calcula el valor que toma el extremo derecho.

c) Expresa la suma de las áreas de los rectángulos de base el ancho de los intervalos y altura f del extremo derecho.

d) Ahora toma el límite de la suma cuando *n* (el número de intervalos) tiende a infinito. Utilizando las propiedades de los límites, puedes separarlo en dos: el límite de una expresión en función de *n*, y el limite de la suma de los *n* primeros números naturales. Sabiendo que esta suma vale n(n+1)/2, junta ambas expresiones y calcula el límite de esta cuando *n* tiene a infinito.

e) Calcula esta misma área con el cálculo integral que conoces y compara ambos resultados.

6.5. Revisión.

Con esta actividad, esperamos que los alumnos adquieran conciencia de todo el proceso que ha habido para el desarrollo del cálculo en el pasado. Las actividades tienen como objetivo practicar algunos de los conocimientos básicos sobre el cálculo diferencial e integral. El último ejercicio, aunque de elevada complejidad, al estar desglosado en varios pasos y disponer de la ayuda del profesor deberían ser capaces de realizarlo para así comprender la facilidad que supone tener los métodos actuales de integración. Así, los alumnos trabajarán en:

- Manejar con soltura las integrales y derivadas de las funciones elementales.
- Calcular áreas bajo curvas y tangentes a estas.

- Conocer los métodos que llevaron a desarrollar el cálculo de derivadas e integrales actual.

- Conocer la historia de esta rama de las matemáticas a través de la resolución de problemas para asimilar mejor la teoría relativa a este tema.

- Desarrollar una primera aproximación a la integral de Riemann.

Finalmente, debo mencionar que en el caso práctico en que los alumnos muestren interés en estas actividades, convendría incrementar el número de estas. Pero a fin de ejemplificar esta forma de trabajar, las actividades planteadas son suficientes.

7. METODOLOGÍA Y EVALUACIÓN.

Para trabajar en el aula los problemas planteados, se seguiría una metodología de clase magistral y resolución de problemas. Se comenzaría entregando a los alumnos las actividades para realizarlas a lo largo de todo el desarrollo del tema a medida que se va avanzando en las clases y los alumnos van adquiriendo los conocimientos necesarios para realizarlas.

Se intentaría que fueran los propios alumnos quienes dieran solución a todas las actividades a partir de los materiales propuestos siguiendo de este modo una metodología de resolución de problemas. No obstante, dado que estos pueden encontrar dificultades en la realización de estas, el profesor podría aportarles la ayuda que fuera necesaria.

Respecto a la evaluación, no parece posible deshacerse de los exámenes, pero dado que las actividades deben tener cierto peso en la evaluación para animar a los alumnos a realizarlas, podría destinarse un pequeño porcentaje de la nota final a este fin, o podrían plantearse como una forma de mejorar la nota final.

Para la evaluación de cada problema dentro de las actividades, podrían desarrollarse árboles de problemas a fin de anticipar qué clase de dificultades podrían encontrar los alumnos durante el desarrollo de las actividades y decidir la puntuación de cada uno de ellos en función del trabajo desarrollado y el esfuerzo invertido.

8. DISCUSIÓN.

A raíz de lo expuesto anteriormente, podemos considerar que la historia de las matemáticas puede ser una herramienta que aporte grandes beneficios a la educación de los alumnos en esta materia, completando su instrucción y ayudando a que los conocimientos arraiguen mejor. Sin embargo, a partir del estudio realizado a cabo sobre la historia para cada una de las propuestas, he podido apreciar la dificultad que supondría llevar a cabo una adaptación a cursos inferiores de secundaria por el bajo nivel de conocimientos y capacidades de los alumnos. La complejidad en el desarrollo de las matemáticas en sus etapas más tempranas (en cuanto a técnicas y razonamientos) y a partir del siglo XVII (en cuanto a lenguaje y nivel) hace que sea más apropiado introducir la historia en los niveles de Bachillerato.

Aun así, algunas partes tales como el último ejercicio de análisis son de un nivel que supera lo que podría esperarse de un alumno de Bachillerato, aunque es de esperar que pueda cumplir su función de resultar llamativo para los alumnos y alumnas.

En cuanto a la estructura en sí de las actividades planteadas, aunque dimos inicio al presente trabajo con la intención de plantear un problema que fuera el tronco de cada serie de actividades, en el caso de las cónicas y del análisis ha sido difícil encontrar un único problema que pudiera ejercer este papel. En su lugar, hemos planteado varios problemas clásicos y/o técnicas, desarrolladas a lo largo de cada conjunto de actividades.

A partir de una revisión del material aquí planteado, podemos apreciar que el nivel que exigen algunas de las actividades supera al que puedan tener la mayoría de alumnos, haciendo necesaria la presencia y guía del profesor para el buen desarrollo de las actividades. Es por ello que el docente que desarrolle en sus clases este tipo de actividades debe estudiar y trabajar previamente la historia de cada tema de las matemáticas, haciendo que este trabajo implique un esfuerzo extra por parte del profesor.

Respecto a los temas tratados en esta propuesta, estos han sido escogidos porque son aquellos en los que se requiere una gran abstracción y suelen resultar de mayor dificultad para los alumnos. Aun así, la historia de otros temas también dispone de muchas posibilidades para poder emplearse en las aulas de E.S.O. y Bachillerato, como la probabilidad y estadística o la geometría y los números en la E.S.O., aunque en los primeros cursos de secundaria habría que elaborar mucho más los materiales y cuidar el nivel de las actividades.

Finalmente, si consideramos los argumentos expuestos en el apartado de marco teórico extraídos de varios artículos acerca del empleo de la historia para la enseñanza de las matemáticas, podemos afirmar que los beneficios que pueden obtener los alumnos con esto pueden ser enormes, incrementando su interés por la materia, sus capacidades para el pensamiento abstracto, sus habilidades para la comprensión y sus aptitudes para aprender a aprender.

9. CONCLUSIONES.

1.- El empleo de este tipo de actividades puede resultar de gran utilidad para los alumnos, aunque es necesario un gran esfuerzo por parte de los docentes en cuanto a la revisión y estudio de cada tema de la historia de las matemáticas.

2.- Para el planteamiento de actividades siguiendo el esquema plasmado en este trabajo, lo ideal es encontrar un problema o actividad alrededor del cual construir el desarrollo de las actividades que esté relacionado con la historia de la temática escogida y resulte atractivo para los alumnos. Sin embargo, la tarea de encontrar tal problema es de gran dificultad debido al nivel de conocimientos de los alumnos o a la propia temática escogida.

3.- La complejidad de la historia de las matemáticas y el modo en que se desarrollaron hacen que esta forma de trabajar no sea apropiada para los cursos inferiores de secundaria, donde el nivel es muy básico, dando una mayor capacidad de juego en cursos de Bachillerato. Aun así, para determinados temas puntuales de secundaria, sería posible emplear la historia como acompañamiento a las explicaciones, pero sin describirla en profundidad y sin el planteamiento de ejercicios como los presentados en este trabajo.

En cuanto a las competencias desarrolladas a lo largo del trabajo, puedo decir que he aprendido la tremenda labor que supone la preparación de las clases de esta asignatura, de tal modo que puedan llamar la atención de los alumnos más allá de la realización de ejercicios de mero cálculo. Así, buscar información y plantear los ejercicios ha sido lo que más tiempo me ha supuesto, y, a pesar de todo el trabajo invertido, puede que no todos sean apropiados o llamen la atención y despierten el interés de los alumnos y alumnas de Bachillerato.

A pesar de esto, con la realización del presente trabajo, he podido incrementar mis conocimientos sobre la materia y he explorado los métodos y formas de desarrollar las clases en un aula de Bachillerato, lo cual ha supuesto un complemento perfecto a las prácticas realizadas durante el máster.

10. REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA.

Auster, P. Relatos sobre historia de la matemática como recurso didáctico. (Extraído de: Franco, Gustavo. (2007, marzo). Relatos sobre historia de la matemática como recurso didáctico. Conversación. Revista interdisciplinaria de reflexión y experiencia educativa. 18, pp. 7-14.)

Başibüyük, K. y Şahin, Ö. (2019). Mathematics teachers' opinion about the history of mathematics. *Acta Didactica Napocensia*, *12*(2).

Boyer, C. B. y Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.

Bütüner, S. Ö. (2018). Secondary School Mathematics Teachers' Knowledge Levels and Use of History of Mathematics. *Journal of Education and Training Studies*, *6*(1), 9-20.

Campuzano, J. C. P. (2015). Breve historia del concepto de derivada.

del Río Sánchez, J. (1997). Historia de la Matemática: implicaciones didácticas. *Suma*, *26*, 33-38.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, *11*(2), 3-6.

Fenaroli, G., Furinghetti, F. y Somaglia, A. (2014). Rethinking mathematical concepts with the lens of the history of mathematics: An experiment with prospective secondary teachers. *Science & Education*, *23*(1), 185-203.

Gómez, J. L. L. (2002). Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática. *IDEAS Y RECURSOS*, 59.

Herrera, J. S. (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato. In *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 557-568). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Lim, S. Y. y Chapman, E. (2015). Effects of using history as a tool to teach mathematics on students' attitudes, anxiety, motivation and achievement in grade 11 classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(2), 189-212.

Maz, A. (1999). La historia de las matemáticas en clase: ¿por qué? y ¿para qué? *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad. Granada: Sociedad Thales y Universidad de Granada*, 205-210.

Sols Lucía, Ignacio. "Historia de las matemáticas". UCM. Madrid, España. Curso 2016-2017.

Urbaneja, P. M. G. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, *45*, 17-28.